بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله اول
بیست و چهارمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۴

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	
۳۰	–	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- ضرایب چند جمله‌ای P صحیح است. تحت کدام یک از شرایط زیر P نمی‌تواند ریشه صحیح داشته باشد؟

الف) $P(۵) = ۵$ و $P(۶) = ۶$ ب) $p(۵) = ۵$ و $P(۶) = ۵$ ج) $P(۵) = ۶$ و $P(۶) = ۶$

د) $P(۵) = ۶$ و $P(۶) = ۵$ هـ) تحت هر کدام از این شرایط، P می‌تواند ریشه صحیح داشته باشد.

۲- شازده کوچولو، روی سیاره کوچکی زندگی می‌کند که شعاعش ۶۰ متر است. روزی با شروع از روی خط استوا، ۳۰π متر به شرق، ۲۰π متر به شمال، ۳۰πمتر به غرب و سرانجام ۲۰π متر به جنوب می‌رود. شازده کوچولو تا مکان اولش چند متر فاصله دارد؟

الف) صفر ب) ۳۰π ج) ۲۰π د) ۴۰π هـ) ۱۵π

۳- چند سه‌تایی طبیعی $x < y < z \leq ۱۰$ وجود دارد که $x + y = z$؟

الف) ۱۵ ب) ۲۰ ج) ۴۰ د) ۴۵ هـ) ۵۰

۴- به ازای چند عدد طبیعی مانند m حاصل $\sqrt{m+۱۵} + \sqrt{m-۱}$ صحیح است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) بی‌نهایت

۵- از شهر A جاده‌ای مستقیم خارج شده است که دو شهر B و C در دو طرفش قرار دارند. مجموع فاصله دو شهر B و C از جاده حداکثر چند کیلومتر است؟ می‌دانیم که فاصله شهر A از دو شهر دیگر ۶۰ و ۵۰ کیلومتر و فاصله دو شهر B و C از هم ۴۰ کیلومتر است.

الف) ۳۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ هـ) ۷۰

۶- الگوریتم زیر را روی چند جمله‌ای $P(x)$ اجرا کرده‌ایم.

۱. d را برابر درجه P قرار بده و اگر $d < ۱$ به سطر ۴ برو.

۲. a را برابر ضریب x^d در P قرار بده و $P(x) - ax^{d-۱}(x+۲)$ را به جای $P(x)$ بگذار.

۳. به سطر ۱ برو.

۴. P را چاپ کن.

پس از اجرای الگوریتم عدد ۱۳۸۴ چاپ شده است. P در آغاز کدام بوده است؟

الف) $x^{۱۰} - ۴۵x^{۳}$ ب) $۱۳x^{۷} - ۲$ ج) $x^{۱۱} - ۸۳x^{۳}$ د) $۱۶x^{۸} + x$ هـ) $-x^{۱۱} + ۸۴$

۷- فرض کنید $(۲ + \sqrt{۳})^n = ۵۰۴۲ + b\sqrt{۳}$ که در آن n طبیعی و b صحیح است. b چند است؟

الف) ۱۳۸۴ ب) ۳۵۴۳ ج) ۷۸۰ د) ۵۸۲۲ هـ) ۲۹۱۱

۸- مستطیلی در صفحه با رئوس $(۰,۰)$، $(۰,۱۰۰)$، $(۱۵۰,۰)$ و $(۱۵۰,۱۰۰)$ در نظر بگیرید. چند خط موازی با قطر گذرا از رأس $(۰,۰)$، اضلاع مستطیل را در دو نقطه متمایز با مختصات صحیح قطع می‌کند؟ قطر را هم بشمارید.

الف) ۹۹ ب) ۱۰۰ ج) ۱۹۹ د) ۲۰۰ هـ) ۳۰۰

۹- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نسبت به ضرب بسته است؟ اعداد طبیعی‌ای که یکانشان در بسط مبنای ...

الف) چهار، ۱ یا ۲ یا ۳ است. ب) پنج، ۱ یا ۲ یا ۴ است. ج) هفت، ۱ یا ۲ یا ۴ است

د) نه، ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ است. هـ) ده، ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۵ است.

۱۰- نیمسازهای داخلی مثلث ABC دایره محیطی آن را در نقاط A'، B' و C' قطع می‌کند. اگر I' مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ باشد، اندازه $\angle B'I'C'$ برابر کدام گزینه است؟

الف) $۹۰^\circ + \frac{B+C}{۴}$ ب) $۱۸۰^\circ - \frac{B+C}{۴}$ ج) $۲A+B-C$ د) $۱۸۰^\circ - A$ هـ) $۲A$

۱۱- اگر a، b و c اعدادی حقیقی باشند که $a^۲+b^۲+c^۲=۱$، مجموعه همه مقادیر ممکن $ab+bc+ca$ زیر مجموعه کدام یک از بازه‌های زیر است؟

الف) $[۰,۲]$ ب) $[-۱,۰]$ ج) $[۰,۱]$ د) $\left[-۲,\frac{۱}{۲}\right]$ هـ) $\left[-\frac{۱}{۲},۲\right]$

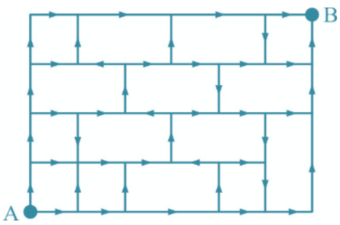
۱۲- دوربینی زیر یک هواپیما نصب شده است. هواپیما روی مسیر خطی در حال اوج‌گیری است. زمین را مسطح فرض کنید. مساحت فیلم‌برداری‌شده، تابع درجه چندی از جابه‌جایی مکانی هواپیما است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) چند جمله‌ای نیست.

۱۳- تصاعد حسابی از اعداد اول با قدر نسبت $n^۲+۱$، که n عددی طبیعی است حداکثر چند عضو دارد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) تصاعد با هر تعداد عضو وجود دارد.

۱۴- در شکل روبه‌رو می‌خواهیم از نقطه A به نقطه B برویم. مسیرها در جهت فلش یک‌طرفه هستند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟



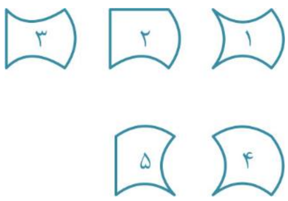
الف) ۳۷ ب) ۵۸ ج) ۱۲

د) ۶۳ هـ) ۶۴

۱۵- طول یال مکعبی یک واحد است. اگر A، B و C رأس‌های مجاور به رأس D باشند، کمترین مقدار مجموع مربعات فاصله نقطه دلخواه P از خطوط AB، BC و CA چقدر است؟

الف) ۱ ب) a ج) a د) a هـ) a

۱۶- هر یک از کاشی‌های روبه‌رو با اضافه و یا کم کردن قطاعی از دایره به مربع ۱×۱ به دست آمده است. هر کدام از این کاشی‌ها را «صفحه پرکن» می‌گوییم اگر بتوان با آن صفحه نامتنهای شبکه‌بندی‌شده را پوشاند؛ هر کاشی را می‌توان ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه دوران داد و آن را پشت‌ورو کرد. البته کاشی باید طوری در صفحه قرار داده شود که چهار گوشه آن روی نقاط شبکه قرار گیرد. کدام یک از کاشی‌ها صفحه‌پرکن هستند؟



الف) ۱و ۵ ب) ۲و۴و۵ ج) ۲و۳و۵ د) ۳و۴ هـ) ۲و۴

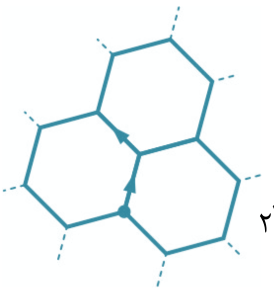
۱۷- کدام بزرگ‌تر است؟

الف) $۲^{۴۳۱}$ ب) $۳^{۴۲۱}$ ج) $۴^{۳۲۱}$ د) $۲۱^{۴۳}$ هـ) $۳۱^{۴۲}$

۱۸- در مثلث ABC نقطه D محل برخورد نیم‌ساز زاویه A با ضلع BC و نقطه E محل تماس دایره محاطی داخلی با ضلع BC است. اگر $BE = ED$، کدام گزینه صحیح است؟

الف) $۳A + ۲C = ۱۸۰^\circ$ ب) $۲A + ۳C = ۱۸۰^\circ$ ج) $B - C = ۹۰^\circ$
د) $۲B + C = ۱۸۰^\circ$ هـ) $B = ۲C$

۱۹- کندوی زنبوری از شش‌ضلعی‌های منتظم با طول واحد تشکیل شده است. بچه زنبوری روی اضلاع حرکت می‌کند و به هر رأسی که می‌رسد می‌تواند به سمت چپ یا راست خود برود. اگر این زنبور ۱ بار به چپ، ۲ بار به راست، ۴ بار به چپ، ... و $۲^{۱۳۸۴}$ بار به چپ برود، فاصله مکان نهایی او از ابتدای حرکتش چند واحد است؟



الف) بین صفر و $۲^{۵}$ ب) بین $۲^{۵}$ و $۲^{۱۰}$ ج) بین $۲^{۱۰}$ و $۲^{۱۵}$ د) بین $۲^{۱۵}$ و $۲^{۲۰}$ هـ) بین $۲^{۱۳۸۴}$ و $۲^{۱۳۸۵}$

۲۰- می‌خواهیم برای سه روستا به فاصله دوبه‌دوی، ۹، ۱۴ و ۱۹ کیلومتر، مدرسه‌ای بسازیم. کمترین مقدار a که بتوان مدرسه را جایی ساخت که فاصله‌اش از هر سه روستا بیش از a کیلومتر نباشد چند است؟

الف) ۹ ب) ۹/۵ ج) $۷\sqrt{۲}$ د) $\frac{۵۷\sqrt{۲}}{۸}$ هـ) ۱۰

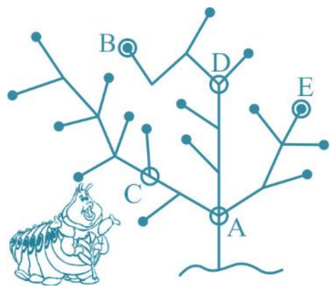
۲۱- بسط مبنای ۲− را با استفاده از ارقام صفر و یک، شبیه بسط مبنای ۲ تعریف می‌کنیم. مثلاً

$$(۱۰۱)_{-۲} = ۱\times(-۲)^{۲} + ۰\times(-۲)^{۱} + ۱\times(-۲)^{۰} = ۵$$

۱۱۷ در مبنای ۲−، چند تا یک دارد؟ (توجه کنید گذاشتن علامت منفی، مثلاً $-(۱۰۱)_{-۲}$ مجاز نیست.)

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶
د) ۱۱۷ بسط مبنای ۲− ندارد. هـ) ۱۱۷ بیشتر از یک بسط در مبنای ۲− دارد.

۲۲- کرمی شکمو می‌خواهد همه میوه‌های درخت روبه‌رو را بخورد و در عین حال مسافتی که روی شاخه‌ها طی می‌کند، کمترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید کرم می‌تواند مکان خود را برای شروع انتخاب کند. کدام نقطه بهتر است؟ فاصله بین دو نقطه متوالی روی درخت یک متر است و تمام شاخه‌های انتهایی، میوه دارند. میوه‌ها با دایره سیاه توپر مشخص شده‌اند.



الف) A ب) B ج) C د) D هـ) E

۲۳- *، عملی روی اعداد صحیح است با این خاصیت که جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است ولی روی جمع پخش نمی‌شود. به جای آن برای هر a، b و c صحیح $a * (b + c) = (a * b) + (a * c) - a$. می‌دانیم که $۱ * ۱ = ۳$ در این صورت $۱۰ * ۱۰$ چند است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۱۰۲ ج) ۱۲۰ د) ۲۵۰ هـ) ۳۰۰

۲۴- در افسانه‌ها آمده است وقتی پادشاه هند می‌خواست به مخترع شطرنج پاداش دهد، طرف در دیزی را باز دید (!) و خواست به ازای خانه اول شطرنج یک دانه گندم، به ازای خانه دوم، دو دانه گندم و به همین ترتیب برای هر خانه‌ای، دو برابر خانه قبل به او گندم داده شود. فرض کنید خانه‌های صفحه شطرنج مانند شکل روبه‌رو شماره‌گذاری شده‌اند. چه کسری از کل گندم‌ها به ازای خانه‌های سفید درخواست شده است؟ (جواب دو تا دو رقم اعشار است.)

الف) ۰/۳۳ ب) ۰/۵۰ ج) ۰/۶۶ د) ۰/۷۵ هـ) هیچ‌کدام

-۲۵ در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع BC و نقطه E محل تماس دایره محاطی داخلی مثلث با ضلع BC است. اگر نقطه L وسط AM و K محل برخورد AE با BL باشد و بین اضلاع مثلث رابطه $۲(AC - AB) = BC$ باشد، آن‌گاه $\frac{AK}{AE}$ کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ د) $\frac{۱}{۲}$ هـ) $\frac{۳}{۴}$

-۲۶ دو نفر با هم مشاعره می‌کنند؛ اولی بیتی از اشعار روبه‌رو را می‌خواند و دومی باید بیت جدیدی بگوید که با حرف آخر بیت قبلی شروع شده باشد. چند بیت وجود دارد که با شروع از آن‌ها نفر اول می‌تواند مستقل از بازی نفر دوم برنده شود؟ بازنده کسی است که نتواند شعری بخواند.

این سر به مهر نامه بدان مهربان رسان
نور تویی سور تویی دولت منصور تویی
ای پادشه خوبان داد از غم تنهایی
نابرده رنج گنج میسر نمی‌شود
درخت تو گر بار دانش بگیرد
تا توانی دلی به دست آور
یعقوب‌وار وا اسفاها همی‌زنم
تا نگردی بی‌خبر از جسم و جان
یار شور و یار بین دل شو و دل‌دار بین
دوست آن باشد که گیرد دست دوست

کس را خبر مکن که کجا می‌فرستمت
مرغ که طور تویی خسته به منقار مرا
دل بی‌تو به جان آمد وقت است که بازآیی
مزد آن گرفت جان برادر که کار کرد
به زیر آوری چرخ نیلوفری را
دل شکستن هنر نمی‌باشد
دیدار خوب یوسف کنعانم آرزوست
کی خبر یابی ز جانان یک زمان
در پی سرو روان چشمه و گلزار بین
در پریشان حالی و درماندگی

الف) صفر ب) ۲ ج) ۵ د) ۸ هـ) ۱۰

-۲۷ A، B و C سه زیرمجموعه دلخواه مجموعه اعداد طبیعی هستند. با دو عمل اجتماع و مکمل، حداکثر چند مجموعه مختلف می‌توان ساخت؟

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۱۸ د) ۱۲۸ هـ) ۲۵۶

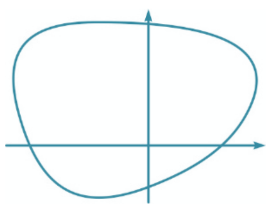
-۲۸ فاصله مرکزهای دو دایره به شعاع $\sqrt{۳}$، برابر ۴ است. نقاطی را در نظر بگیرید که خارج دو دایره هستند و هر خط گذرنده از آن نقاط، دست‌کم یکی از دو دایره را قطع می‌کند. مساحت این مجموعه چقدر است؟

الف) صفر ب) $۲\pi - \sqrt{۳}$ ج) $۴\pi - ۲\sqrt{۳}$ د) $۲\sqrt{۳} - \pi$ هـ) $۴\sqrt{۳} - ۲\pi$

-۲۹ خانه‌های یک مستطیل ۵×۴ را می‌خواهیم با چهار رنگ طوری رنگ کنیم که در هر مربع ۲×۲، هر چهار رنگ ظاهر شوند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

الف) ۱۲۰ ب) ۱۹۲ ج) ۲۴ د) ۲۶۴ هـ) ۲۸۸

-۳۰ شکل روبه‌رو مجموعه جواب‌های کدام یک از معادلات زیر در صفحه است؟



الف) $x^۳ + xy + y^۳ = ۴$
ب) $Cos\,x + x^۲ + y^۲ + y = ۲$
ج) $x^۲y^۳ + xy^۲ = y = ۱$
د) $x^۴ + y^۴ = ۲y - x + ۱$
هـ) $\sin(x + y) = \sin x + \sin y = ۱$

کلید سوالات

۱	ب
۲	ب
۳	ب
۴	ب
۵	ب
۶	الف
۷	هـ
۸	الف
۹	ج
۱۰	الف
۱۱	هـ
۱۲	ب
۱۳	الف
۱۴	ب
۱۵	ب
۱۶	هـ
۱۷	ب
۱۸	ب
۱۹	الف
۲۰	ب
۲۱	ج
۲۲	ب
۲۳	ج
۲۴	ج
۲۵	ب
۲۶	ج
۲۷	هـ
۲۸	هـ
۲۹	د
۳۰	د
۳۱	
۳۲	
۳۳	
۳۴	
۳۵	
۳۶	
۳۷	
۳۸	
۳۹	
۴۰	
۴۱	
۴۲	
۴۳	
۴۴	
۴۵	
۴۶	
۴۷	
۴۸	
۴۹	
۵۰	
۵۱	
۵۲	
۵۳	
۵۴	
۵۵	
۵۶	
۵۷	
۵۸	
۵۹	
۶۰	

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۴

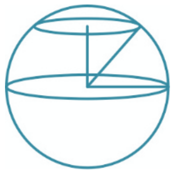
۱- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

لم: اگر چند جمله‌ای $P(x)$ دارای ضرایب صحیح باشد آن‌گاه $a-b\,|\,P(a)-P(b)$.

فرض کنید چند جمله‌ای $P(x)$ با ضرایب صحیح دارای ریشه صحیح a باشد، یعنی $P(a)=0$. حال اگر بخواهد گزینه‌ی (ب) درست باشد طبق لم باید $5-a\,|\,P(5)-P(a)=5$ و همچنین باید $6-a\,|\,P(6)-P(a)=5$ که در این صورت باید عدد ۵ دو مقسوم‌علیه متوالی داشته باشد، که این غیر ممکن است.

دقت کنید که برای گزینه‌های (الف)، (ج) و (د) به ترتیب چند جمله‌ای‌های $P(x)=x$، $P(x)=-3(x-5)(x-6+)$ و $P(x)=11-x$ شرایط هر گزینه را دارا هستندو به علاوه به ترتیب دارای ریشه‌های صحیح ۰، ۷ و ۱۱ می‌باشند.

۲- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**



محیط مدار استوا $2\pi\times 30=120\pi$ است. در حرکت اول به اندازه‌ی یک چهارم محیط خط استوا به سمت شرق می‌رود. سپس به اندازه 20π بالا می‌رود (مانند شکل اول) که در این صورت 10π تا رسیدن به قطب شمال فاصله دارد. یعنی $\frac{2}{3}$ مسیر تا قطب شمال طی شده است. پس زاویه‌ی طی شده $\frac{2}{3}$ کل زاویه تا رسیدن به قطب است، یعنی ۶۰ درجه. حال بر روی یک دایره جدید باید حرکت کند. اگر از مرکز کره به مرکز این دایره‌ی جدید وصف کنیم؛ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ای ۳۰ درجه خواهیم داشت. ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه نصف‌وتر است. پس شعاع دایره‌ی جدید نصف شعاع کره یعنی ۳۰ متر است. بنابراین محیط این دایره‌ی جدید $2\pi\times 30=60\pi$ و حال که 30π روی محیط این دایره حرکت کرده است؛ یعنی نصف محیط را رفته است. در آخرین حرکت به مدار استوا بر می‌گردد. در این حرکت نصف خط استوا را طی کرده است. پس نسبت به جای اول خود یک چهارم محیط استوا (30π) طی کرده است.

۳- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

z بین ۳ تا ۱۰ می‌تواند باشد. اگر z ۳ یا ۴ باشد برای x یک حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۵ یا ۶ باشد برای x دو حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۷ یا ۸ باشد برای x سه حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۹ یا ۱۰ باشد، برای x چهار حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود؛ پس در مجموع: $2\times 1+2\times 2+2\times 3+2\times 4=20$ حالت داریم.

۴- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

باید $\sqrt{m-1}+\sqrt{m+15}=n$ باشد که در آن n عددی طبیعی است. پس داریم:

$$\sqrt{m+15}-\sqrt{m-1}=\frac{16}{\sqrt{m+15}+\sqrt{m-1}}=\frac{16}{n}\in Q$$

حال چون $\sqrt{m+15}+\sqrt{m-1}$ و $\sqrt{m+15}-\sqrt{m-1}$ هردو گویا هستند میانگین آن‌ها یعنی $\sqrt{m+15}$ و به تبع آن $\sqrt{m-1}$ هر دو گویا هستند. پس $m+15$ و $m-1$ هر کدام مربع عددی گویا هستند. می‌توان به سادگی نشان داد که اگر عددی طبیعی مربع عددی گویا باشد لزوماً مربع عددی طبیعی است.

پس حتماً باید $\sqrt{m-1}$ و $\sqrt{m+15}$ طبیعی باشند.

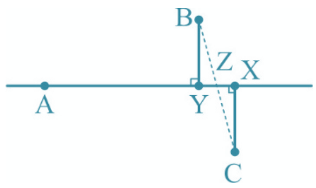
بنابراین باید داشته باشیم:
$$m+15=a^2, m-1=b^2\Rightarrow a^2-b^2=16\Rightarrow (a-b)(a+b)=16$$

حال با بررسی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۶ به این نتیجه می‌رسیم که m فقط می‌تواند اعداد ۱ و ۱۰ باشد.

۵- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

اگر X و Y به ترتیب نقاطی روی خط جاده باشند که کم‌ترین فاصله را تا C و B دارند و Z محل تقاطع پاره‌خط BC وجاده باشد، می‌دانیم که مثلث‌های BYZ و CXZ قائم‌الزاویه هستند و همواره در یک مثلث قائم‌الزاویه وتر بزرگ‌ترین ضلع است، بنابراین:

$BY \le BZ\,,\ CX \le CZ$



در نتیجه: $BY + CX \le BC$ پس مجموع فاصله‌ی دو شهر از جاده حداکثر برابر فاصله‌ی دو شهر است که برابر ۴۰ کیلومتر است. زمانی هم این مقدار برابر ۴۰ می‌شود که BC بر جاده عمود باشد که این حالت هم محتمل است.

۶- **گزینه‌ی [الف] صحیح است.**

فرض کنید $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ باشد. در این صورت P(x) بعد ازیک تغییر به چند جمله‌ای زیر تبدیل می‌شود:

$$(a_{n-1} - 2a_n)x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

تغییر دوم این چندجمله‌ای به چندجمله‌ای زیر تبدیل خواهد شد:

$$(a_{n-2} - 2a_{n-1} + 4a_n)x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + a_1 x + a_0$$

با ادامه‌ی این روند به چند جمله‌ای درجه صفر زیر می‌رسیم:

$$(-2)^0 a_0 + (-2)^1 a_1 + (-2)^2 a_2 + \dots + (-2)^{n-1} a_{n-1} + (-2)^n a_n$$

حال اگر گزینه‌ها را در این مسئله امتحان کنیم فقط گزینه‌ی (الف) است که حاصل بالا ۱۳۸۴ برابر می‌شود:

$$(-2)^3 \times -45 + (-2)^{10} \times 1 = 1384$$

۷- **گزینه‌ی [هـ] صحیح است.**

می‌دانیم که اگر آن عبارت را در مزدوجش ضرب کنیم حاصل برابر یک می‌شود؛ یعنی:

$$(2+\sqrt{3})^n (2-\sqrt{3})^n = 1$$

حال اگر بتوانیم مقدار مزدوج را بر حسب خود عبارت بدست آوریم، مسئله حل خواهد شد. برای این منظور با استقرا به راحتی می‌توان نشان داد که اگر $(2+\sqrt{3})^n = r_n + s_n\sqrt{3}$ باشد؛ در این صورت $(2-\sqrt{3})^n = r_n - s_n\sqrt{3}$ خواهد شد. بنابراین با جای‌گذاری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 1 &= (2+\sqrt{3})^n (2-\sqrt{3})^n = (r_n + s_n\sqrt{3})(r_n - s_n\sqrt{3}) \\ &= (5042 + b\sqrt{3})(5042 - b\sqrt{3}) = 5042^2 - b^2 \times 3 \\ &\Rightarrow 1 = 5042^2 - 3b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{5042^2 - 1}{3} \Rightarrow b = 2911 \end{aligned}$$

۸- گزینه‌ی [الف] صحیح است.

شیب قطر برابر $\frac{2}{3} = \frac{100}{150}$ است و تعداد ۴۹ خط داریم که دارای این شیب هستند و زیر خط قرار دارند. این تعداد از آن‌جا به‌دست می‌آید که به ازای هر ۳ واحد حرکت در راستای محور افقی به سمت راست و ۲ واحد حرکت در راستای محور عمودی به سمت پایین به نقاط جدیدی در این مستطیل می‌رسیم که خط گذرنده از آن‌ها موازی قطر است.

دقیقاً به همین میزان هم بالای قطر پاره‌خط وجود دارد. پس در مجموع ۹۹ خط موازی داریم.

۹- **گزینه‌ی [ج] صحیح است.**

برای رد گزینه‌ی (الف) ۲×۲ در مبنای چهار را در نظر بگیرید که حاصل ۱۰ می‌شود. که یکانش ۰ است.

برای رد گزینه‌ی (ب) ۴×۲ در مبنای پنج را در نظر بگیرید که حاصل ۱۳ می‌شود. که یکانش۳ است.

برای رد گزینه‌ی (د) ۶×۲ در مبنای نه را در نظر بگیرید که حاصل ۱۳ می‌شود. که یکانش ۳ است.

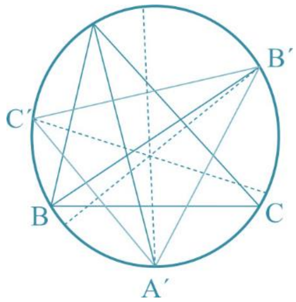
برای رد گزینه‌ی (هـ) ۲×۲ در مبنای ده را در نظر بگیرید که حاصل ۴ می‌شود. که یکانش ۴ است.

برای اثبات گزینه‌ی (ج) باید نشان دهیم که اگر رقم یکان هر عددی در مبنای هفت، ۱ یا ۲ یا ۴ باشد در ضرب درون همین مجموعه قرار خواهد گرفت که با بررسی هر ۹ حالت به این نتیجه خواهیم رسید.

۱۰- **گزینه‌ی [الف] صحیح است.**

شکل این سوال به صورت روبه‌رو خواهد شد:

$$\angle B'I'C' = \frac{B'AC'}{۲} + \frac{C''A'B''}{۲}$$



که در آن B'' و C'' به ترتیب پای نیم‌سازهای زوایای B' و C' بر دایره‌ی محیطی هستند. همان‌طور که در شکل نیز واضح است:

$$\frac{C''A'B''}{۲} = \frac{C''A'}{۲} + \frac{A'B''}{۲} = \frac{\angle C'}{۲} + \frac{\angle B'}{۲} \ , \ \frac{B'AC'}{۲} = \angle A'$$

در نتیجه $\angle B' = \angle A' + \frac{\angle B'}{۲} + \frac{\angle C'}{۲} = ۹۰^\circ + \frac{\angle A'}{۲}$ و از آن‌جا که زاویه‌ی A' رو به و به کمان $B'AC'$ است داریم:

$\angle A' = \frac{\angle B}{۲} + \frac{\angle C}{۲}$ در نتیجه:

$$\angle B'I'C' = ۹۰^\circ + \frac{\angle B + \angle C}{۴}$$

۱۱- **گزینه‌ی [هـ] صحیح است.**

نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر ممکن در بازه‌ی $\left[-\frac{۱}{۲}, ۱\right]$ قرار دارد. برای این منظور دو نامساوی‌های زیر را ثابت می‌کنیم:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + bc + ac \geq -\frac{۱}{۲}(a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

برای اثبات نامساوی سمت چپ داریم:

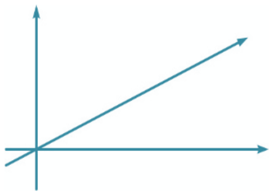
$$\begin{aligned}
& a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + bc + ac \\
\Leftrightarrow\ & ۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲c^۲ \geq ۲ab + ۲bc + ۲ac \\
\Leftrightarrow\ & (a^۲ + b^۲) + (b^۲ + c^۲) + (c^۲ + a^۲) \geq ۲ab + ۲bc + ۲ac \\
\Leftrightarrow\ & (a^۲ + b^۲ - ۲ab) + (b^۲ + c^۲ - ۲bc) + (c^۲ + a^۲ - ۲ac) \geq ۰ \\
\Leftrightarrow\ & (a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-a)^۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

برای اثبات نامساوی راست هم داریم:

$$ab+bc+ac\geq \frac{۱}{۲}(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})$$
$$\Leftrightarrow ۲ab+۲bc+۲ac\geq -(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})$$
$$\Leftrightarrow a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲bc+۲ac\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^{۲}\geq ۰$$

حال دقت کنید که اگر $a=b=c=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، $ab+bc+ca=۱$ و اگر $a=-b=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و $c=۰$ باشد، $ab+bc+ca=\frac{-۱}{۲}$. بنابراین گزینه‌ی صحیح باید شامل ۱ و $\frac{-۱}{۲}$ باشد که تنها گزینه‌ای که این خاصیت را دارد گزینه‌ی (هـ) است.

۱۲- گزینه‌ی [ب] صحیح است.



دقت کنید که حرکت هواپیما مشابه خط روبه‌رو است که طبق قضیه‌ی تالس نتیجه می‌دهد ارتفاع هواپیما به صورت خطی رشد می‌کند و در نتیجه مساحت به صورت تابعی درجه دو خواهد بود.

۱۳- گزینه‌ی [الف] صحیح است.

فرض کنید که a اولین عضو این دنباله باشد. در این صورت باید همه‌ی اعداد دنباله‌ی زیر اول باشند:

$$a, a+n^{۲}+۱, a+۲n^{۲}, a+۳n^{۲}+۳, \ldots$$

می‌خواهیم نشان دهیم که در این صورت چهارمین عضو دنباله نمی‌تواند عددی اول باشد و در نتیجه دنباله حداکثر سه عضوی می‌شود.

برای این منظور باید دقت شود که باقیمانده $n^{۲}+۱$ بر ۳ نمی‌تواند صفر باشد. (این موضوع را می‌توانید با بررسی حالت‌های مختلفی که باقیمانده‌ی n بر ۳ می‌تواند داشته باشد تحقیق کنید.) پس با اضافه شدن به a باقی‌مانده‌ی آن بر ۳ با a متفاوت خواهد شد. به همین ترتیب باقیمانده $a+۲n^{۲}+۲$ بر ۳ باقیماندهٔ $a+n^{۲}+۱$ بر ۳ و با باقی‌مانده‌ی a بر ۳ متفاوت است.

پس در بین این اعداد یکی باید مضرب ۳ باشد و چون عددها اول هستند باید یکی از این اعداد ۳ باشد.

اما دقت کنید که a عددی اول است و در نتیجه $a\geq ۱$. پس

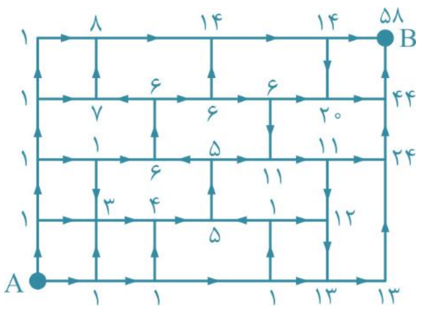
$$a+۲n^{۲}+۲>a+n^{۲}+۱>۱+۱+۱=۳$$

پس تنها a می‌تواند برابر ۳ باشد. حال اگر دنباله عضو چهارمی داشته باشد باید باقی‌مانده‌ی این عضو یعنی $a+۳n^{۲}+۳$ بر ۳ با باقیمانده ی a بربر ۳ باشد. که در این صورت عدد ضرب ۳ است که نمی‌تواند اول باشد.

دقت کنید که اگر $n=۱$ باشد تصاعد ۳، ۵، ۷ داری سه عضو است. بنابراین مقدار حداکثر برابر ۳ است.

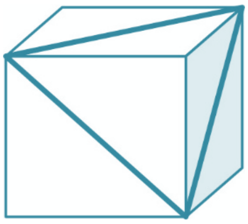
۳۰- گزینه‌ی [ب] صحیح است.

طبق اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن به هر نقطه برابر است با جمع تعداد راه‌هایی که می‌توان به آن نقطه رسید و بر همین اساس تعداد **راه**های رسیدن به هر نقطه را محاسبه می‌کنیم و جدول روبه‌رو به دست می‌آید:



۱۵- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

خطوط مذکور بر روی یک صفحه قرار دارند. بنابراین برای این که مجموع مربعات کمترین مقدار خود را اخذ کند باید نقطه‌ی P بر روی همان صفحه قرار داشته باشد. دلیل آن این است که اگر خارج صفحه را در نظر بگیریم تصویر آن نقطه بر روی صفحه فاصله کمتری خواهد داشت و چون مثلث متساوی الاضلاع است باید این نقطه بر روی مرکز ثقل باشد. (برای چک کردن این موضوع هم می‌توانید مثلث متساوی الاضلاع مسئله را مثلثی مرکز صفر و رئوس $(\circ,a)$، $(\frac{a\sqrt{۳}}{۲},\frac{-a}{۲})$ و $(\frac{-a\sqrt{۳}}{۲},\frac{-a}{۲})$ در نظر بگیرید و خواهید دید که کم‌ترین مجموع مربعات فاصله مربوط به مبدأ مختصات که مرکز ثقل مثلث است می‌باشد.)



حال مسئله‌ی اصلی ضلع مثلث برابر است با $\sqrt{۲}$است پس ارتفاع آن طبق قضیه‌ی فیثاغورس برابر $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ است و فاصله‌ی این نقطه تا ضلع مثلث برابر $\frac{۱}{\sqrt{۶}}=\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ است که مربع آن برابر $\frac{۱}{۶}$ است و جمع سه تا از آن‌ها مساوی $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

۱۶- **گزینه‌ی [هـ] صحیح است.**

ادعا می‌کنیم که شرط لازم برای این که با یک کاشی بتوان صفحه را فرش کرد این است که تعداد فرورفتگی‌ها و برآمدگی‌هایش با هم **برابر** باشند. فرض کنید یک کاشی a تورفتگی و b برآمدگی داشـته باشـد. حال برای یک عدد طبیعی مثل N، یک مربع $N\times N$ رادر نظر بگیرید. تعداد کاشی‌های لازم برای فرش کردن این مربع برابر $N^۲$ است. دقت کنید که تعداد تورفتگی‌های کاشی‌ها درون این مربع حداقل برابر $aN^۲-۴N$ است زیرا ممکن است حداکثر $۴N$ تا از تورفتگی‌ها در ضلع‌های مربع بزرگ باشند. از طرف دیگر تعداد برآمدگی‌ها درون این مربع حداکثر برابر $bN^۲$ است. اما می‌دانیم اکثر صفحه کاملاً کاشی‌کاری شده باشد باید برای هر تورفتگی یک برآمدگی داشته باشیم پس تعداد آن‌ها دردرون مربع باید برابر باشد و این نتیجه می‌دهد که $aN^۲-۴N\le bN^۲$. پس $a-\frac{۴}{N}\le b$. حال چون N عدد طبیعی دل خواهی است این نتیجه می‌دهد که $a\le b$. با برعکس کردن استدلال برای تورفتگی‌ها و برآمدگی‌ها می‌توان نشان داد که $b\le a$. پس در کل $a=b$ و تعداد برآمدگی‌ها و تورفتگی‌ها برابر هستند. بنابراین کاشی‌های شماره‌های ۱، ۳ و ۵ نمی‌توانند صفحه پرکن باشند. بنابراین تنها کاشی‌های‌شماره‌ی ۲ و۴ باقی می‌مانند که با این دو کاشی هم می‌توان صفحه را فرش کرد.

بنابراین فقط شکل‌های ۲و۴ می‌توانند صفحه پرکن باشند که با توجه به الگوی زیر این چنین هستند.

۱۷- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

می‌دانیم که اگر درمقایسه دو عدد توانی پایه‌های برابر باشد، عددی که توان برابر دارد بزرگ‌تر است و هم چنین اگر توان‌ها برابر باشد، عـددی که پـایـه‌ی بزرگ‌تـر دارد، بزرگ‌تـر اسـت و اگـر پایـه و تـوان عـددی از دیگـر بـزرگ‌تر باشـد عـدد اول بزرگ‌تر اسـت. بـنـابـرایـن $۲^{۴۳۱}>۲^{۶۴۲}=۴^{۳۲۱}$. به علاوه

$$۴^{۳۲۱}=۲^{۶۴۲}=(۲^۵)^{۱۲۸}\times ۲^۲=۳۲^{۱۲۸}\times ۲^۲>۳۲^{۱۲۸}>۳۱^{۴۲}$$

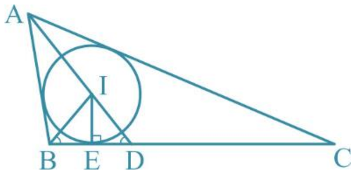
$$۴^{۳۲۱}=۲^{۶۴۲}=(۲^۵)^{۱۲۸}\times ۲^۲=۳۲^{۱۲۸}\times ۲^۲>۳۲^{۱۲۸}>۳۱^{۴۳}$$

و داریم:

$$۴^{۳۲۱}=(۳^۷)^{۶۰}\times ۳^۱=۲۱۸۷^{۶۰}\times ۳^۱>۲۰۴۸^{۶۰}\times ۳$$
$$=(۲^{۱۱})^{۶۰}\times ۳=۲^{۶۶۰}\times ۳>۲^{۶۶۰}\times ۲=۲^{۶۶۱}>۲^{۶۴۲}=۴^{۳۲۱}$$

۱۸- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle B$ را رسم می‌کنیم. این نیم‌ساز هم مانند AD از مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث (نقطه‌ی I) خواهد گذشت. بعد از آن مرکز دایره‌ی محاطی I به ضلع عمود می‌کنیم. دو مثلث BIE و DIE با هم هم‌نهشت هستند. پس زاویه‌ی $\angle D_۲$ برابر زاویه‌ی $\angle B_۱$ نصف زاویه‌ی $\angle B$ است. همچنین $\angle D_۲$ زاویه‌ی خارجی مثلث DAC هم هست. پس داریم:



$$\frac{\angle B}{۲} = \frac{\angle A}{۲} + \angle C \Rightarrow \angle B = \angle A + ۲\angle C$$
$$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = ۲\angle A + ۳\angle C \Rightarrow ۲\angle A + ۳\angle C = ۱۸۰^\circ$$

۱۹- **گزینه‌ی [الف] صحیح است.**

اگر زنبور ۶ بار به سمت چپ برود؛ محیطی شش ضلعی را طی می‌کند و سـر جـای اول خود باز می‌گردد. در مورد سمت راست هم همین‌طور است.

حال کافی است دقت کنید که برای هر عدد طبیعی فرد n، ۲^n به صورت $۶k+۲$ و برای هر عدد طبیعی زوج n، ۲^n به صورت $۶k+۴$ می‌شود.

پس می‌توان فرض کرد که به جز حرکت اول که یک بار به سمت چپ می‌رود یکی در میان ۲ بار به سمت راست و ۴ بار به چپ می‌رود. حال با طی کردن چندحرکت اولیه می‌توان دید که بر روی یک مسیر بسته حرکت می‌کند و بنابراین دور نمی‌شود! پس فاصله‌ی مکان نهایی از مکان اولیه کم‌تر از $۲^۵$ است.

۲۰- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

ابتدا فرض کنید روستاها را با A، B و C نشان دهیم به طوری که $AB=۹$، $AC=۱۴$ و $BC=۱۹$. دقت کنید که اگر M نقطه‌ی وسط BC باشد، $MB=MC=۹/۵$ و به علاوه

$$AM^۲ = \frac{AB^۲+AC^۲}{۲} - \frac{BC^۲}{۴} = \frac{۱۹۶+۸۱}{۲} - \frac{۳۶۱}{۲} = ۴۸/۲۵ < ۹۰/۲۵ = (۹/۵)^۲$$

پس اگر مدرسه را در M بسازیم فاصله‌اش از سه روستا بیش‌تر از ۹/۵ نیست و لذا $A \le ۹/۵$. اما دقت کنید که نقطه‌ای در صفحه وجود ندارد که فاصله‌اش از هر دو B و C کم‌تر از ۹/۵ باشد، پس a نمی‌تواند کم‌تر از ۹/۵ باشد و بنابراین در کل کم‌ترین مقدار ممکن ۹/۵ است.

۲۱- **گزینه‌ی [ج]صحیح است.**

برای این منظور باید از تقسیمات متوالی بر عدد ۲- انجام دهیم:

$$۱۱۷ = (-۲)(-۵۸)+۱ \qquad ۷ = (-۲)(-۳)+۱$$
$$-۵۸ = (-۲)(۲۹)+۰ \qquad -۳ = (-۲)(۲)+۱$$
$$۲۹ = (-۲)(-۱۴)+۱ \qquad ۲ = (-۲)(-۱)+۰$$
$$-۱۴ = (-۲)(۷)+۰ \qquad -۱ = (-۲)(۱)+۱$$

پس $۱۱۷ = (۱۱۰۱۱۰۱۰۱)_{-۲}$ که دارای ۶ رقم ۱ است. تنها کافی است با استقرا ثابت کنید که هر عدد صحیح در مبنای ۲- یک بسط یک تا خواهد داشت.

۲۲- **گزینه‌ی [ب] صحیح است.**

اگر از نقطه‌ی A شروع کند باید هر مسیری از سـه مسیر روبه‌رویش را که طی می‌کند برگردد (به جز مسیر آخر). بهتر است به جای این که مجبور بشود کل شاخه را برود و برگردد؛ از انتهای یک شاخه آغاز کند که مجبور به بازگشت مسیر نشود.

هم‌چنین اگر از D یا C آغاز کند باید بخشی از مسیر را برگردد.

پس تنها موارد باقی‌مانده B و E هستند که در انتهای شاخه‌های اصلی درخت قرار دارند. در مقایسه‌ی این دو باید به این نکته توجه و دقت کنیم که نقطه‌ی E بر روی شاخه به طول ۳ با ۳ تا شاخه منشعب قرار دارد و نقطه B بر روی یک شاخه به طول ۶ با ۴ تا انشعاب.

اگر از E آغاز کند مجبور است یکی از شاخه‌های اصلی که طول آن ۶ است و انشعاباتی دارد را برگردد ولی اگر از B آغاز کند می‌تواند از شاخه‌های اصلی که طول آن ۶ است برگردد و یا از شاخه اصلی که طول آن ۳ است برگردد که به وضوح حالت اخیر مسیر کم‌تری را برگشته است. پس کل مسافت طی شده آن کم‌تر خواهد شد.

بنابراین بهترین نقطه برای آغاز نقطه‌ی B خواهد بود و بهترین مسیر این است که پس از خوردن تمام میوه‌های شاخه‌ی خودش به شاخه‌ی سمت راست رفته و پس از آن به شاخه‌ی سمت چپ برود. که در طول این مسیر در بهترین حالت ۴۶ متر طی می‌کند که کم‌ترین میزان ممکن است.

۲۳- گزینه‌ی [ج] صحیح است.

ادعا می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n داریم: $n*1=2n+1$ برای این منظـور از استقرار استفاده می‌کنیم. حکم برای $n=1$ **به** دلیل فرض صورت سؤال درست است. حال داریم:

$$(n+1)*1=1*(n+1)=(1*n)+(1*1)-1=(2n+1)+3-1=2n+3$$

هم‌چنین ادعا می‌کنیم که برای هر عددی طبیعی n داریم: $n*n=(n+1)^2-1$ برای این منظور هم از استقرار استفاده می‌کنیم:

$$(n+1)*(n+1)=(n+1)*n+(n+1)*1-(n+1)$$
$$(n+1)*n+(2n+3)-(n+1)$$

حال باید مقدار $(n+1)*n$ را محاسبه کنیم تا حکم مورد نظر اثبات شود:

$$(n+1)*n=n*(n+1)=n*n+n*1-n$$
$$=((n+1)^2-1)+2n+1-n=n^2+3n+1$$

حال با جای‌گذاری در معادله‌ی فوق خواهیم داشت:

$$(n+1)*(n+1)=(n^2+3n+1)+n+2=(n+2)^2-1$$

بنابراین $10*10=120$ می‌شود.

۲۴- گزینه‌ی [ج] صحیح است.

صفحه‌ی شطرنج را به ۱۶ تا مربع ۲ × ۲ مجاور افراز می‌کنیم. در این صورت در هر مربع ۲ × ۲ افراز شده مربع کوچک بالا ـ سمت راست سفید است و اگرمقدار آن خانه x باشد مقدار بقیه‌ی خانه‌های مربع ۲ × ۲ شامل آن خانه بر حسب x به صورت جدول روبه‌رو خواهد بود. بنابراین نسبت مقدار خانه‌های سفید به کل خانه‌ها در این مربع برابر $\dfrac{x+2^9x}{x+2x+2^8x+2^9x}=\dfrac{513x}{771x}\approx 0/66$ است. پس نسبت خانه‌های سفید به کل خانه‌ها در کل جدول هم برابر همین عدد است.

x	۲x
۲^۸x	۲^۹x

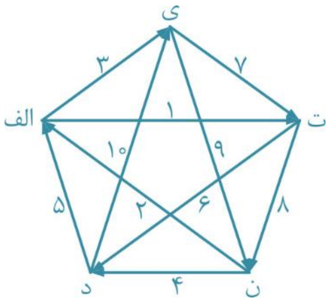
۲۵- گزینه‌ی [ب] صحیح است.

دقت کنید که طبق خواص مثلث می‌دانیم $BE=\dfrac{BC+AB-AC}{2}$ که با توجه به فرض مسئله نتیجه می‌شود که

$$BE=\frac{BC+AB-AC}{2}=\frac{2(AC-AB)+AB-AC}{2}=\frac{AC-AB}{2}=\frac{BC}{4}=\frac{BM}{2}$$

پس E نقطه‌ی وسط پاره‌خط BM و چون L هم وسط AM است K مرکز ثقل مثلث ABM و AE میانه‌ی این مثلث است. پس با توجه به خواص میانه‌ها می‌دانیم که $\dfrac{AK}{AE}=\dfrac{2}{3}$.

۲۶- گزینه‌ی [ج] صحیح است.



یک گراف جهت‌دار به این صورت می‌سازیم که حروف «الف، ن، د، ت و ی» را به عنوان رئوس اختیار می‌کنیم و به ازای هر بیت دو رأس مربوط به حرف ابتدایی و انتهایی آن بیت را با یالی جهت‌دار به هم وصل می‌کنیم. با این کار به گراف روبه‌رو می‌رسیم. (عددهای نوشته شده روی یال‌ها شماره‌ی بیت مربوط به آن یال را در صورت سؤال نشان می‌دهد).

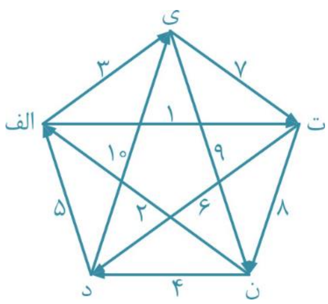
حال مشاعره در مسئله معادل با این می‌شود که نفر اول یک یال انتخاب کند ونفر بعد هر بار یالی غیرتکراری که ابتدای آن انتهای یال نفر قبلی باشد انتخاب می‌کند. هر کس که نتواند یالی انتخاب کند بازنده است. با توجه به تقارن وجود در گراف یال‌های ۱,۶,۱۰,۹,۲ و همین طور ۳,۷,۸,۴,۵ وضعیت مشابهی دارند.

پس کافی است یک یال از هر دسته به عنوان یال شروع بازی انتخاب شود و وضعیت بازی بررسی شود. (با توجه به این نکته الان می‌فهمم که گزینه‌های (ب) و (د) نمی‌توانند پاسخ مسئله باشند.)

ابتدا فرض کنید که نفر اول یک یال از دسته‌ی اول مثلاً یال ۱ را انتخاب کند. ادعا می‌کنیم در این صورت نفر اول می‌تواند برنده شود. نفر دوم باید از بین ۶,۸ یک یال انتخاب کند. اگر یال ۶ را انتخاب کند نفر اول یال ۵ و اگر یال ۸ را برگزیند، نفر اول یال۲ را انتخاب می‌کند. با این انتخاب‌ها بعد از سه حرکت بار دیگر در رأس الف هستیم و نفر دوم این بار مجبور است یال ۳ را انتخاب کند و بعد از آن نفر اول یال ۷ را انتخاب می‌کند. با این حرکات دوباره به راست که قبلاً در آن بوده‌ایم بازگشته‌ایم و در این مرحله نفر دوم به ناچار باید یالی از بین ۶,۸ که قبلاًانتخاب نکرده را انتخاب کند. بعد نفر اول استراتژی حرکت دومش را تکرار می‌کند و به این صورت برای بار سوم به رأس الف برگشته‌ایم با این تفاوت که این بار انتخاب جدیدی نداریم و بنابراین نفر اول حتماً برنده است. پس در ۵ یال ۱,۶,۱۰,۹,۲ نفر اول می‌تواند برنده شود.

حال ادعا می‌کنیم که در ۵ یال دیگر مثلاً یال شماره‌ی ۳ نفر دوم می‌تواند برنده باشد. در این حالت نفر دوم یال ۷ را انتخاب می‌کند. حال نفر اول برای انتخاب یال بعدی دو حالت دارد.

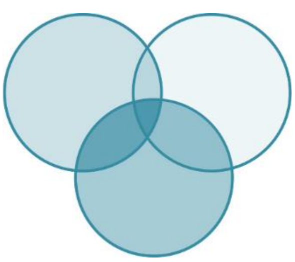
حالت اول. یال ۸ را انتخاب کند. در این حالت نفر دوم یال ۴ را انتخاب می‌کند. بعد از این نفر یک یکی از دو یال ۱۰ یا ۵ را انتخاب می‌کند. می‌توان به سادگی بررسی کرد که با انتخاب هر کدام از این دو یال انتخاب‌های بعدی به هر نفر تحمیل می‌شود و با انتخاب یال‌ها همه‌ی یال‌ها استفاده می‌شوند. پس آخرین یال را نفر دو استفاده می‌کند و بنابراین نفر اول که گزینه‌ای برای انتخاب ندارد، بازنده است.



حالت دوم. یال ۶ را انتخاب کند. در این صورت نفر دوم یال ۱۰ را انتخاب می‌کند. با این انتخاب نفر اول مجبور از یال ۹ را انتخاب کند و در مرحله‌ی بعد نفر دوم باید یالی که از رأس ن خارج می‌شود را برگزیند. اگر نفر دوم یال ۲ را انتخاب کند، مشابه حالت قبل می‌توان چک کرد که حرکات بعدی به دو نفر تحمیل می‌شود و در نهایت همه‌ی یال‌ها استفاده می‌شود که این باعث می‌شود نفر دوم پیروز شود.

پس در کل نفر اول با شروع از ۵ یال ۱,۶,۱۰,۹,۲ می‌تواند برنده‌ی بازی باشد.

۲۷- گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

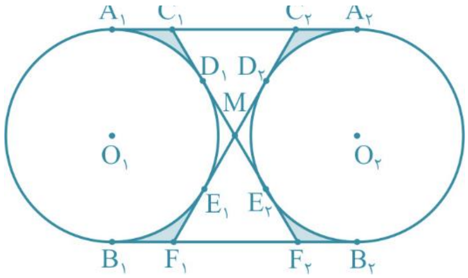


با استفاده از هر کدام از این مجموعه‌ها می‌توان مجموعه‌های مجزای زیر را پدید آورد. برای این منظور کافی است دقت کنید که عمل اشتراک را می‌توانیم با استفاده از اجتماع و مکمل داشته باشیم. تعداد کل این زیرمجموعه‌ها ۸ تا هستند که همگی از هم مجزا هستند. این زیرمجموعه‌ها در شکل با رنگ‌های مختلف مشخص شده‌اند. (یک ناحیه بیرونی هم هست که با رنگ سفید مشخص شده است).

حال ما می‌توانیم با کنار هم قرار دادن هر تعداد دل‌خواه از این ۸ مجموعه یک مجموعه‌ی جدید ایجاد کنیم. مثلاً با اجتماع زیر مجموعه‌ی زرد و نارنجی و آبی یک مجموعه به دست می‌آید. پس تعداد کل مجموعه‌های ممکن برابر $۲^۸$ است.

۲۸- **گزینه‌ی [هـ] صحیح است.**

ابتدا دقت کنید که با توجه به طول شعاع دایره‌ها و فاصله‌ی بین مرکزهای آن‌ها دو دایره خارج از هم قرار دارند. حال ادعا می‌کنیم نواحی رنگی شکل زیر تنها نقاطی خارج از دایره‌ها هستند که هر خط گذرنده از آن‌ها حداقل یکی از دو دایره را قطع می‌کند. (خط‌های رسم شده مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره هستند.)

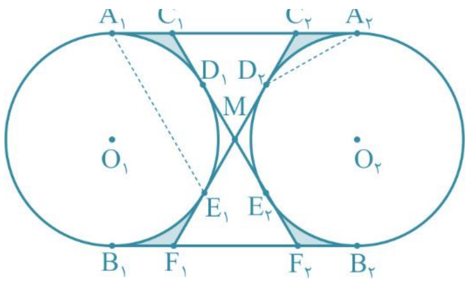


ابتدا دقت کنید که اگر نقطه‌ای درون مثلث‌های MC_1C_2 و یا MF_1F_2 باشد خط واصل بین آن نقطه و M هیچ کدام از دایره‌ها را قطع نمی‌کند. اگر نقطه‌ای هم بیرون از دو دایره و چهارضلعی $A_1A_2B_2B_1$ باشد به راحتی می‌توان از آن نقطه خطی گذرند که هیچ کدام از دایره‌ها را قطع نکند. اگر هم نقطه‌ای درون قسمت‌های خارج از دایره‌های مثلث‌های MD_1E_1 و MD_2E_2 باشد. خط مماس بر دایره‌ی نزدیک تر از آن نقطه تنها در یک نقطه آن دایره را قطع می‌کند و با دایره‌ی دیگر اشتراکی ندارد. حال می‌توان این خط مماس را اندکی تغییر داد طوری که دایره‌ی نزدیک‌تر را هم قطع نکند. حال نشان می‌دهیم که اگر نقطه‌ای در یکی از نواحی رنگی مثلاً قسمت رنگی درون مثلث $C_2A_2D_2$ باشد هر خط گذرا از آن دست کم یکی از دایره‌ها را قطع می‌کند. برای این منظور از لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم. نقطه‌ی X درون مثل ABC قرار دارد. هر خط گذرا از X یا از یک رأس و یک ضلع مثلث عبور می‌کند یا دقیقاً دو ضلع را قطع می‌کند.

اثبات این لم به سادگی و با در نظر گرفتن دونیم‌خط خط گذرنده از X انجام می‌شود.

حال در مسئله‌ی اصلی نقطه‌ای را درون ناحیه‌ی رنگی مثلث $C_2A_2D_2$ و یک خط دل‌خواه گذرنده از آن نقطه را در نظر بگیرید.



اگر ضلع A_2D_2 را قطع کند یا از یکی از رئوس مثلث بگذرد با دایره‌ی به مرکز O_2 تقاطع دارد. پس فرض کنید خط با A_2D_2 اشتراکی ندارد. بنابراین باید دو ضلع A_2C_2 و D_2C_2 را قطع کند. حال دقت کنید که از آن‌جا که این خط را با C_2E_1 تقاطع دارد باید شامل نقطه‌ای درون مثلث $A_1C_2E_1$ باشد. دقت کنید که این خط با ضلع C_2E_1 از این مثلث تقاطع دارد ولی با ضلع C_2A_1 تقاطع ندارد. (زیرا تقاطع این خط با خط شامل C_2A_1 در پاره‌خط A_2C_2 است.) بنابراین طبق لم بالا این خط به ناچار باید با ضلع A_1C_1 اشتراک داشته باشد و بنابراین خط دایره‌ی به مرکز O_2 را قطع می‌کند. با توجه به تقارن شکل اثبات ادعا برای دیگر نواحی رنگ شده هم مشابه است و بنابراین اثبات درستی ادعا کامل می‌شود.

بنابراین کافی است مساحت چهار ناحیه‌ی رنگ‌شده‌ی شکل را محاسبه کنیم. برای این منظور دقت کنید که $\sin(\angle D_2MO_2)=\dfrac{D_2O_2}{O_2M}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$

پس $\angle D_2MO_2=۶۰^\circ$ و به تبع آن با اندکی محاسبه خواهیم داشت که:

$$\angle D_2O_2A_2=۶۰^\circ \Rightarrow \angle C_2O_2D_2=۳۰^\circ \Rightarrow C_2A_2=A_2O_2.\tan(۳۰^\circ)=۱$$

پس برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی مورد نظر داریم:

$$\text{مساحت ناحیه‌ی رنگی} = ۸\times(C_2O_2A_2)\ \text{مساحت مثلث} - \frac{۲}{۳}\times \text{مساحت دایره}$$

$$=۸\times\frac{۱\times\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۲}{۳}\times\pi(\sqrt{۳})^۲=۴\sqrt{۳}-۲\pi$$

۲۹- گزینه‌ی [د] صحیح است.

راه‌حل اول. فرض کنید رنگ‌های مورد استفاده را با چهار شماره‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ نمایش دهیم. به این ترتیب برای رنگ‌آمیزی چهارخانه‌ی بالا راست جدول $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$ حالت داریم. فرض کنید چهار خانه‌ی بالا سمت راست جدول به صورت زیر رنگ شده باشند.

۱	۴			
۲	۳			

دراین صورت برای دو خانه‌ی اول سطر سوم باید شامل ۱و۴ و دو خانه‌ی اول سطر چهارم باید شامل ۲ و ۳ باشند. حال بر حسب حالت‌های مختلفی که این چهارخانه می‌توانند رنگ‌آمیزی شوند مسئله را حالت‌بندی می‌کنیم.

حالت اول.

دراین حالت خانه‌ی دوم از ستون سوم در سه مربع ۲×۲ حاضر است، پس نمی‌تواند برابر ۱، ۴ و ۳ باشد و لذا به ناچار۲ است. با مشخص شدن این خانه می‌توان رنگ بقیه‌ی خانه‌های این ستون و با استدلال مشابه رنگ بقیه‌ی خانه‌های جدول را به طور یک‌تا مشخص کرد.

۱	۴			
۲	۳			

۴	۱			
۲	۳			

حالت دوم

در این حالت هم کاملاً مشابه حالت اول رنگ بقیه‌ی جدول به طور یک‌تا تعیین می‌شود. (ابتدا خانه‌ی دوم از ستون سوم که باید برابر ۲ باشد، سپس بقیه‌ی خانه‌های این ستون و به همین شکل بقیه‌ی جدول)

۱	۴			
۲	۳			
۴	۱			
۲	۳			

حالت سوم.

این حالت هم مشابه حالت‌های قبلی بقیه‌ی جدول به طور یک‌تا تعیین می‌شود با این تفاوت که ابتدا رنگ خانه‌ی سوم از ستون سوم مشخص می‌شود.

۱	۴			
۲	۳			
۱	۴			
۳	۲			

حالت چهارم.

۱	۴			
۲	۳			

۱	۴			
۲	۳			

در این جا برای انتخاب رنگ خانه‌ی اول ستون سوم دو حالت ۱و۲ داریم. با انتخاب رنگ این خانه رنگ بقیه‌ی ستون تعیین می‌شود. سپس برای انتخاب رنگ خانه‌ی ستون چهارم که رنگ کلیه‌ی خانه‌های این ستون را تعیین می‌کند هم دو حالت ۳ و ۴ داریم. در نهایت برای انتخاب رنگ خانه‌ی اول ستون پنجم هم دو حالت ۱و۲ را داریم. با انتخاب رنگ این خانه ستون پنجم هم تعیین می‌شود. پس در این حالت برای رنگ‌آمیزی جدول ۸ حالت داریم.

بنابراین در کل با توجه به انتخاب رنگ ۴ خانه‌ی اولیه $۲۶۴ = ۱۱۲ \times ۲۴ = (۸+۱+۱+۱) \times ۲۴$ حالت داریم.

راه‌حل دوم. می‌توان به سادگی نشان داد که در هر چنین جدولی یا خانه‌های همه‌ی سطرها یک در میان رنگ شده‌اند یا خانه‌های همه‌ی ستون‌ها. به علاوه اگر خانه‌های یک سطر به صورت یک در میان رنگ شده باشند می‌توان نشان داد که خانه‌های همه‌ی سطرها باید یک در میان رنگ شده باشند و حکم مشابه برای ستون‌ها هم درست است. پس باید تعداد جدول‌هایی را بشماریم که سطرها یا ستون‌های آن به صورت یک در میان رنگ شده‌اند.

در حالتی که سطرها یک در میان باشند. در سطر اول۴ حالت برای رنگ خانه‌ی اول و۳ حالت برای رنگ خانه‌ی دوم داریم که می‌شود ۱۲ حاالت. برای سطر دوم ۲ حالت و سطر سوم نیز ۲ حالت و سطر چهارم هم ۲ حالت. که در کل۹۶ حالت می‌شود.

در حالتی که ستون‌ها یک در میان باشند: برای ستون اول ۴ حالت برای رنگ خانه‌ی اول و ۳ حالت برای رنگ خانه‌ی دوم داریم که می‌شود۱۲ حالت. برای ستون دوم ۲ حالت و ستون سوم نیز ۲ حالت و ستون چهارم هم ۲ حالت و هم‌چنین ستون آخر که در کل ۱۹۲ حالت می‌شود.

جدول‌هایی که هم سطر و هم ستون آن‌ها یک در میان است در خانه‌ی گوشه سمت چپ ۴ حالت، خانه‌ی مجاور۳ حالت و خانه زیرین آن ۲ حالت دارد و بقیه به طور یک‌تا تعیین می‌شوند و بنابراین تعداد آن‌ها ۲۴ است.

در نهایت تعداد کل جدول‌ها به کمک اصل شمول و عدم شمول به دست می‌آید:

$$۲۶۴ = ۹۶ + ۱۹۲ - ۲۴$$

۳۰- **گزینه‌ی [د] صحیح است.**

گزینه‌های (الف) و (هـ) به دلیل تقارن حذف می‌شوند؛ به این معنی که اگر نقطه‌ی (α,β)در هر کدام از این معادله‌ها صدق کند **نقطه‌ی** (β,α) هم صدق می‌کند. بنابراین باید نمودار جواب آن‌ها باید نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم محورهای مختصات متقارن است که نمودار مسئله این طور نیست.

دلیل رد گزینه‌ی (ب) این است که اگر در معادله‌ی این گزینه قرار دهیم $y=۰$ معادله به صورت $\cos x + x^{۲} = ۲$ در می‌آید که یک تابع زوج است یعنی به ازای جمیع مقادیر x که در این رابطه صدق می‌کند x‒ نیز صدق می‌کند. یعنی باید نقاطی که نمودار محور x را قطع کرده نسبت به خط محور yها متقارن باشد که نمودار صورت سؤال چنین نیست.

دلیل رد گزینه‌ی (ج) این است که اگر در معادله قرار دهیم $x=۰$ معادله به صورت $y=۱$ تبدیل می‌شود، یعنی مجموعه‌ی جواب رابطه‌ی مربوط به این گزینه باید محور yها را باید تنها در یک نقطه قطع کند که باز هم نمودار رسم شده در صورت سؤال این گونه نیست.

پس این ۴ گزینه رد می‌شوند و تنها گزینه‌ی (د) باقی می‌ماند که صحیح است.